

losen nichtsymmetrischen Tensorfeld  $\mathfrak{J}(\mathbf{r})$  ableiten. Man hat

$$\varepsilon = \text{Grad } \mathfrak{s} + \text{Rot } \mathfrak{J}$$

mit  ${}^1 \text{Grad } \mathfrak{s} \equiv \nabla \mathfrak{s}$ ,  $\text{Rot } \mathfrak{J} \equiv \nabla \times \mathfrak{J}$ .

Der erste Anteil ist aus der gewöhnlichen Elastizitätstheorie genügend bekannt. Zu einer Analyse des zweiten Teiles hat man diesen in seine invarianten Bestandteile zu zerlegen. Mit der stets zulässigen Zerlegung  $\mathfrak{J} = \iota \times \nabla + \alpha \nabla$  erhält man, wenn man noch den nichtsymmetrischen Tensor  $\iota$  in symmetrischen  $\iota^S$  und antisymmetrischen  $\iota^A$  aufteilt,

$$\begin{aligned} \text{Rot } \mathfrak{J} &= \text{Ink } \iota^S + \text{Def}(\text{rot } \alpha) \\ &+ \text{Ink } \iota^A - \frac{1}{2}[\nabla(\text{rot } \alpha) - (\text{rot } \alpha)\nabla] \end{aligned}$$

oder mit  $\mathbf{u} \equiv \text{rot } \alpha$ ,  $\text{div } \mathbf{u} \equiv 0$  und der skalaren Ortsfunktion  $\lambda(\mathbf{r}) \equiv \text{div } \iota^A$

$$\begin{aligned} \text{Rot } \mathfrak{J} &= \text{Ink } \iota^S + \text{Def } \mathbf{u} \\ &+ (\text{grad } \lambda + \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{u}) \times \mathbf{I}. \end{aligned}$$

Dabei ist  $\text{Ink } \iota^S \equiv \nabla \times \iota^S \times \nabla$ ,  $\text{Def } \mathbf{u} \equiv \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \nabla)$ ,  $\mathbf{I} \equiv$  Einheitstensor 2. Stufe.

Zur physikalischen Bedeutung dieser Glieder:  $\text{Ink } \iota^S$  ist der spannungserzeugende Anteil der plastischen Deformation. Er enthält (in seinem Kugeltensoranteil) die Wirkung neu zugefüllter oder weggenommener Materie.  $\text{Def } \mathbf{u}$  entspricht einer Deformation, die man sich ebenso wie  $\text{Ink } \iota^S$  durch Materietransport infolge Laufens von Versetzungen entstanden denken kann. Diese Deformation erzeugt jedoch keine Spannungen. Die Rolle von  $\mathbf{u}$  wird noch klarer durch die Feststellung, daß  $d\mathbf{u}/dt$  mit dem in der Dynamik inkompressibler Flüssigkeiten gebrauchten Geschwindigkeitsvektor  $\mathbf{v}$  identisch ist. Demnach hat  $\text{div } \mathbf{u} = 0$  die Bedeutung einer Kontinuitätsgleichung. Mit der Deformation  $\text{Def } \mathbf{u}$  sind zwangsläufig die Drehungen  $\text{rot } \mathbf{u}$  verbunden;  $\text{grad } \lambda$  sind Drehungen, die ohne gleichzeitige Deformation vor sich gehen. Letztere kann man durch Ausschneiden, Verdrehen und Zusammenkleben von Volumenteilen mit Rotationssymmetrie erzeugen.

Der axiale Vektor  $\text{grad } \lambda + \text{rot } \mathbf{u}$  beschreibt die plastische Drehung des Volumenelementes gegenüber

<sup>1</sup> Bezeichnungen in den Tensorformeln nach M. Lagally, Vorlesungen über Vektorrechnung, Akad. Verl.-Ges. Leipzig 1928.

<sup>2</sup> Die Gleichung  $\text{Rot } \varepsilon = \alpha$  wurde von B. A. Bilby, Rep. Conf. Def. in Cryst. Solids, Bristol 1955, S. 124 (ohne

der Ausgangslage. Man kann zeigen, daß die drei Funktionen, die in  $\lambda$  und  $\mathbf{u}$  stecken, durch die etwa für  $\mathfrak{J}$  zu stellende Nebenbedingung  $\text{Div } \mathfrak{J} = 0$  nicht an  $\iota^S$  (ebenfalls drei Funktionen) gekoppelt werden.

Nach dieser Analyse lassen sich die elastisch-plastischen Grundgleichungen sehr übersichtlich formulieren. Es gelten im Volumen die Gleichungen <sup>2</sup>

$$\text{Rot } \varepsilon = \alpha, \quad \text{Div } \sigma + \mathfrak{F} = 0. \quad (*)$$

Hinzu kommt die Gleichung für die Energiedichte

$$e = \frac{1}{2} \sigma \dots \varepsilon^\sigma, \quad \varepsilon^\sigma \equiv \text{Def } \mathfrak{s} + \text{Ink } \iota^S$$

und das Hookesche Gesetz in der Form

$$\sigma = c \dots \varepsilon^\sigma$$

( $c$  = Hookescher Tensor 4. Stufe, nur die Spannungserzeugenden Anteile  $\varepsilon^\sigma$  des Verzerrungstensors dürfen im Hookeschen Gesetz vorkommen).

Für Flächen, die zwei Medien I und II trennen, leitet man aus (\*) in der üblichen Weise die Grenzbedingungen

$$(\mathbf{n} \times \varepsilon)_I - (\mathbf{n} \times \varepsilon)_{II} = -\beta, \quad (\mathbf{n} \cdot \sigma)_I - (\mathbf{n} \cdot \sigma)_{II} = \mathfrak{A}$$

ab ( $\mathbf{n}$  = Normaleneinheitsvektor,  $\beta, \mathfrak{A}$  = Flächendichte der Versetzungen bzw. äußeren Kräfte).

Zum Schluß geben wir noch die Energiegleichung für einen einfach zusammenhängenden endlichen Körper im Sonderfall  $\mathfrak{F} = \mathfrak{A} = 0$ . Der Körper soll von einem starren Medium umgeben sein und an diesem haften. Es gilt dann

$$E = \frac{1}{2} \iiint \tilde{\varphi} \dots \alpha \, d\tau + \frac{1}{2} \iint \tilde{\varphi} \dots \beta \, df$$

mit  $\tilde{\varphi}_{ij} \equiv \varphi_{ji}$ . Dabei ist  $\varphi(\mathbf{r})$  der durch die Gleichungen  $\sigma = \text{Rot } \varphi$ ,  $\text{Div } \varphi = 0$  definierte, nichtsymmetrische Spannungsfunktionstensor.  $\varphi$  eignet sich besonders zur Berechnung der mit einer räumlichen Versetzungsdichte verbundenen Spannungen.

Den Herren Prof. U. Dehlinger, Dr. A. Seeger und Dipl.-Phys. G. Rieder sei für zahlreiche Diskussionen herzlich gedankt.

Analyse des Verzerrungszustandes), und unabhängig vom Verf. in Z. Phys. **142**, 463 [1955] (mit Teilanalyse), angegeben. Weitere Zitate zur vorliegenden Arbeit werden in einer ausführlicheren Darstellung folgen.

## Zu Fröhlichs eindimensionalem Modell der Supraleitung

Von H. Haken

Institut für Theoretische Physik der Universität Erlangen  
(Z. Naturforschg. **11 a**, 96–98 [1956]; eingeg. am 19. November 1955)

Während die Entdeckung der Isotopie-Verschiebung des Sprungpunktes die Fröhlichsche Vorstellung<sup>1</sup>,

daß die Supraleitung auf Grund der Wechselwirkung zwischen Elektronen und Gitterschwingungen zustandekommt, stark unterstützte, zeigte dann die genauere Diskussion<sup>2</sup> der Fröhlichschen wie auch der Bar-

<sup>1</sup> H. Fröhlich, Phys. Rev. **79**, 845 [1950]; Proc. Phys. Soc., Lond. A **63**, 778 [1950].

<sup>2</sup> W. Kohn u. Vachaspati, Phys. Rev. **83**, 462 [1951]; G. Wentzel, Phys. Rev. **83**, 168 [1951]; M. R. Schafroth, Helv. Phys. Acta **24**, 645 [1951].



deïnschen<sup>3</sup> Arbeiten die Unzulänglichkeit der hierbei verwendeten mathematischen Methoden auf. Fröhlich<sup>4</sup> hat daher ein sehr einfaches, eindimensionales Modell behandelt, in dem die Elektronen lediglich mit zwei entgegengesetzt laufenden Gitterwellen gleicher Wellenlänge  $l_0$  in Wechselwirkung stehen sollen (Ausbreitungsvektor der Gitterwelle  $w$  bzw.  $-w$ ).

Für die Lösung der Schrödinger-Gleichung macht Fröhlich den Produktansatz:

$$D(x_1, \dots, x_N) \chi(b_w^+, b_{-w}^+), \quad (1)$$

wobei  $D$  eine Determinante aus Einzelelektronenwellenfunktionen  $\varphi_k(x_i)$  und  $\chi$  eine Funktion der Erzeugungsoperatoren für Schallquanten der beiden Gitterwellen sind. Die Funktionen  $\varphi_k$  und  $\chi$  sieht Fröhlich als noch frei wählbar an und gewinnt deren Bestimmungsgleichungen mit Hilfe des Variationsprinzips, von denen die Gleichungen für  $\varphi_k(x_i)$  besagen, daß die Elektronen sich in einem von der Gitterdeformation geschaffenen sinusförmigen Potentialfeld bewegen. Bei geeigneter Wahl von  $l_0$  weist das Energiespektrum der Einzelelektronen an der Besetzungsgrenze eine Energielücke wie ein Isolator auf. Neben der schon beim Isolator bekannten Einzelanregung von Elektronen (Überspringen der Energielücke) sollen nach Fröhlich auch solche stromtragenden Zustände existieren, bei denen sich die Elektronengesamtheit (zusammen mit der Gitterdeformation) bewegt.

Infolge des sinusförmigen Potentials bevorzugen die Elektronen — wenigstens nach dem Ansatz (1) — periodisch gewisse Gitterbereiche. Infolgedessen ist aber, wie wir bereits in einer früheren Note<sup>5</sup> bemerkten, der Ansatz (1) nicht mit der allgemeinen Form der exakten Lösung<sup>6</sup> verträglich, derzufolge kein Gitterpunkt vor dem anderen von den Elektronen bevorzugt wird. Die einfachste Möglichkeit, von der Fröhlichschen Lösung (1) zu einer mit der allgemeinen Lösungsform verträglichen Lösung zu gelangen, besteht im Aufbau von Linearkombinationen aus den Funktionen (1). Nach einer bereits an anderer Stelle<sup>7</sup> skizzierten Regel erhalten wir<sup>8</sup>:

$$\varphi(x_1, \dots, x_N; b_w^+, b_{-w}^+) \quad (2)$$

$$= \int e^{iK\xi} D(x_1 - \xi, \dots, x_N - \xi) \chi(b_w^+ e^{-i w \xi}, b_{-w}^+ e^{i w \xi}) d\xi.$$

In dieser neuen Lösung (2) bevorzugen die Elektronen wie auch die Gitterschwingungen nun keinen Gitterpunkt mehr, sondern laufen gemeinsam durch das Gitter. Ferner sind Lösungen der Form (2) für verschiedene  $K$ -Werte aufeinander orthogonal, so daß damit der von Kuper<sup>9</sup> gegenüber den Funktionen (1) gemachte Einwand behoben ist, daß die stromtragenden Zustände z. Tl. erheblich mit dem Grundzustand überlappen. Die Erwartungswerte für Energie und

Strom bestimmten wir mit Hilfe einer Entwicklung nach fallenden Potenzen der Zahl  $N$  der Elektronen. Für  $K=0$  ergibt sich:

$$E = E_{\text{Fröhlich}} - \frac{3 \hbar^2 w^2}{m} \frac{\exp(-3/F \nu)}{F \nu},$$

worin der erste Summand der Zahl  $N$  proportional und der zweite von  $N$  unabhängig sind, während die nächsten, hier nicht angegebenen Summanden mit mindestens  $1/N$  verschwinden. In obiger Gleichung ist  $m$ : Elektronenmasse,  $\nu$ : Zahl der freien Elektronen pro Atom,  $F$ : eine effektive Kopplungskonstante (siehe hierzu: Fröhlich<sup>4</sup>).

Die Energieabsenkung bestätigt nochmals, daß (2) ein besserer Ansatz als (1) ist. Bemerkenswerterweise ist die Energieabsenkung für den Grundzustand wie auch für die Zustände, in denen ein Elektron die Energielücke übersprungen hat, die gleiche; die Energielücke des Fröhlichschen Modells bleibt also auch bei dem Ansatz (2) (sogar ihrer Größe nach) erhalten. Da die Energielücke schon bei Fröhlich nicht von der Atommasse abhing, ergibt sich auch beim Ansatz (2) kein Isotopie-Effekt. Dies ist an sich mit der Fröhlichschen Auffassung im Einklang, daß dieser Effekt erst in einem dreidimensionalen Modell enthalten ist. Für die stromtragenden, sich an den Grundzustand anschließenden Zustände finden wir als Energie-Erwartungswert

$$E(K) = E(0) + N \frac{m}{2} v^2 \frac{1}{\pi F \nu} + O(K^2, N^0); \quad v = \frac{\hbar K}{N m},$$

der von dem Fröhlichschen Ausdruck erheblich abweicht, während sich für den Strom praktisch der Fröhlichsche Wert ergibt:

$$S = \frac{e}{m} \hbar K + O(N^0).$$

Schließlich haben wir die Überlappungsintegrale

$$U = \langle \int \varphi_1^* \varphi_2 dx_1 \dots dx_N \rangle$$

sowie die Matricelemente

$$M = \langle \int \varphi_1^* H \varphi_2 dx_1 \dots dx_N \rangle$$

zwischen dem Grundzustand und denjenigen angeregten Zuständen, in denen ein Elektron die Lücke übersprungen hat, berechnet. Wir erhalten:

$$U \sim \frac{1}{N} \exp(-3/2 F \nu), \quad M \sim \exp(-3/2 F \nu).$$

Das Matricelement  $M$  verschwindet also nicht mit wachsender Zahl der Elektronen, so daß noch erhebliche Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen dem Grundzustand und den angeregten Zuständen bestehen, die

den Fall eines Elektrons findet sich (2) schon bei G. Höhler, Z. Phys. **140**, 192 [1955].

<sup>8</sup> Bei (2) ist zu beachten, daß die Integration nur über  $-l_0/2 \leq \xi < l_0/2$  geht und nur ganz bestimmte  $K$ -Werte zugelassen sind, so z. B. für den „Grundzustand“  $D(x_1, \dots, x_N)$  nur die Werte  $K = \pm n w$ ,  $n$  ganze Zahl.

<sup>9</sup> C. G. Kuper, Proc. Roy. Soc., Lond. A **227**, 214 [1955].

<sup>3</sup> J. Bardeen, Rev. Mod. Phys. **23**, 261 [1951], hier weitere Zitate.

<sup>4</sup> H. Fröhlich, Proc. Roy. Soc., Lond. A **223**, 296 [1954].

<sup>5</sup> H. Haken, Z. Naturforschg. **10a**, 253 [1955].

<sup>6</sup> H. Haken, Z. Naturforschg. **9a**, 228 [1954].

<sup>7</sup> H. Haken, Referat in Halbleiterprobleme **II**, herausgegeben von W. Schottky, Braunschweig 1955, S. 1. Für

weitere Untersuchungen speziell über die Größe, und unter Umständen sogar über die Existenz der Energielücke wünschenswert erscheinen lassen.

Eine ausführliche Darstellung wird an anderer Stelle erscheinen. Herrn Prof. Dr. H. Volz danke ich für wertvolle Diskussionen.

## Zur Bezirksstruktur dünner Eisenschichten

Von B. Elschner und D. Unangst

Physikalisches Institut der Friedrich-Schiller-Universität, Jena  
(Direktor: Prof. Dr. W. Schütz)

(Z. Naturforsch. 11 a, 98 [1956]; eingeg. am 15. Dezember 1955)

Mit der verfeinerten Bitter-Streifen-Technik<sup>1</sup> kann man die Trennwände zwischen zwei Elementarbezirken der Magnetisierung (Weißsche Bezirke) an der Oberfläche ferromagnetischer Körper sichtbar machen. Beim Eisen treten dabei im allgemeinen 90°- und 180°-Trennwände (Bloch-Wände) auf, je nachdem ob die Magnetisierungsvektoren in den benachbarten Bezirken senkrecht aufeinander oder antiparallel zueinander stehen. Die Dicke solcher Bloch-Wände beträgt nach theoretischen Überlegungen bei Eisen etwa 800 Å.

Wir haben nun bei dünnen „Einkristall“-Eisenschichten die ferromagnetischen Bezirksstrukturen mit der oben erwähnten Technik untersucht.

Zur Herstellung der Schichten wurde reines Eisen auf frische NaCl-Spaltflächen im Hochvakuum aufgedampft. Um eine möglichst gute Orientierung der Schichten zu erhalten, wurde die Temperatur der NaCl-Unterlage durch eine Wechselstromheizung so hoch gewählt (etwa 540 °C), daß gerade noch keine Abdampfung der NaCl-Oberfläche eintrat. Nach Brück<sup>2</sup> und anderen Autoren kann man erwarten, daß bei diesem Aufdampfverfahren „Einkristall“-Schichten entstehen, deren [100]-Richtung senkrecht auf der Oberfläche steht. Außerdem sind solche auf erhitzte Unterlagen aufgedampfte Schichten mechanisch und chemisch besonders widerstandsfähig<sup>3</sup>. Deshalb kann man nach dem Abkühlen den NaCl-Kristall z. B. in Glykol auflösen, ohne daß die Schicht dabei zerstört wird. Die danach frei schwebende, dünne Eisenschicht wird auf einem Deckglas aufgefangen, in Alkohol gewaschen und getrocknet. Die Oberfläche der Schichten betrug im Durchschnitt 25 mm<sup>2</sup>.

Nach Aufbringen der Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub>-Seifen-Suspension konnten wir auf den Schichten viele Weißsche Bezirke beobachten. Dabei zeigte sich, daß zwei Vorzugslagen der Magnetisierung parallel zur Schicht-Oberfläche verlaufen und selbst senkrecht aufeinander stehen.

Aus den wolkenartigen Fe<sub>3</sub>O<sub>4</sub>-Niederschlägen in Abb. 1\* kann man auf die Magnetisierungsrichtung (nachträglich durch Pfeile markiert) schließen. Man erkennt mehrere größere, dolchförmige Bezirke, die durch 90°-Wände voneinander getrennt sind. Solche dolchförmigen Bezirke entstehen vor allem an den Rändern der Schichten oder an Fehlern innerhalb der Schicht. Dadurch wird offensichtlich die Streufeld-Energie herabgesetzt.

Es ist zu bemerken, daß diese Dolche immer von 90°-Wänden gebildet werden. Wir konnten bei den bisher untersuchten Schichten keine 180°-Wand beobachten. Fehlerlose Schichten sind bis auf ihre Randgebiete längs einer der beiden Vorzugslagen magnetisiert. Sie benehmen sich wie kleine aber kräftige Dauermagnete. Das wird auch durch ihr Verhalten in einem Torsionsmagnetometer bestätigt.

Bei Abb. 2 und Abb. 3 wurde die Magnetisierung der Schicht (Pfeilrichtung) durch ein entsprechendes äußeres Magnetfeld während der Beobachtung von einer Vorzugslage in die andere gebracht. In der Schicht befinden sich mehrere Risse und Löcher. Man bemerkt, wie dolchförmige Abschlußbezirke immer an dem Riß entstehen, auf den die Magnetisierung senkrecht auftrifft. Durch Ausbildung solcher Abschlußbezirke wird die Magnetisierung um 90° umgelenkt und kommt auf diese Weise wieder parallel zum Rand der Schicht zu liegen. So wird ein zu großes Streufeld vermieden.

Die dünnste bisher untersuchte Schicht, auf der wir noch deutlich Weißsche Bezirke beobachten können, hat eine Dicke von 850 Å. Die Schichtdicke wurde durch Interferenzstreifen-Versetzung gemessen.

Ausführlichere, weitere Beobachtungen sind im Gange und werden an anderer Stelle veröffentlicht.

<sup>1</sup> H. J. Williams, R. M. Bozorth u. W. Shockley, Phys. Rev. 75, 155 [1949].

<sup>2</sup> L. Brück, Ann. Phys., Lpz. 26, 233 [1936].

<sup>3</sup> H. König, Optik 3, 101 [1948].

\* Abb. 1–3 auf Tafel S. 48 d.